

فصل ۲: انتگرال ریمان و ریمان-اشتیلیس

تعریف، خواص و قضایای عمومی

با اثبات‌های کامل و دقیق

مجید کوکبی

۵ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۷	۱	انتگرال ریمان و ریمان-اشتیلیس
۷	۱.۱	درآمد تاریخی و انگیزه
۷	۲.۱	افراز و مجموع‌های بالا و پایین
۷	۱.۲.۱	تعریف ۱.۲.۲ (افراز)
۸	۲.۲.۱	تعریف ۲.۲.۲ (افراز ریزتر)
۸	۳.۲.۱	تعریف ۳.۲.۲ (مجموع بالا و پایین ریمان)
۹	۴.۲.۱	بحث تفصیلی روی تعریف
۹	۵.۲.۱	لم ۴.۲.۲ (یکنوایی نسبت به پالایش)
۱۰	۶.۲.۱	لم ۵.۲.۲ (رابطه بین دو افراز دلخواه)
۱۰	۷.۲.۱	نتیجه ۶.۲.۲
۱۱	۳.۱	تعریف انتگرال ریمان
۱۱	۱.۳.۱	تعریف ۱.۳.۲ (انتگرال ریمان)
۱۱	۲.۳.۱	بحث تفصیلی روی تعریف
۱۱	۴.۱	شرط ریمان برای انتگرال‌پذیری
۱۱	۱.۴.۱	قضیه ۱.۴.۲ (شرط ریمان)
۱۲	۲.۴.۱	قضیه ۲.۴.۲ (معیار دنباله‌ای)
۱۲	۳.۴.۱	قضیه ۳.۴.۲ (انتگرال‌پذیری توابع پیوسته)
۱۳	۴.۴.۱	قضیه ۴.۴.۲ (انتگرال‌پذیری توابع یکنوا)
۱۳	۵.۴.۱	قضیه ۵.۴.۲ (انتگرال‌پذیری توابع با تعداد متناهی ناپیوستگی)
۱۴	۶.۴.۱	مثال ۶.۴.۲ (تابع دیریکله)
۱۴	۷.۴.۱	مثال ۷.۴.۲ (تابع تومه)
۱۴	۵.۱	خواص انتگرال ریمان
۱۴	۱.۵.۱	قضیه ۱.۵.۲ (خطی بودن انتگرال)
۱۶	۲.۵.۱	قضیه ۲.۵.۲ (یکنوایی انتگرال)
۱۶	۳.۵.۱	نتیجه ۳.۵.۲
۱۶	۴.۵.۱	قضیه ۴.۵.۲ (جمع‌ی بودن انتگرال)
۱۷	۵.۵.۱	تعریف ۵.۵.۲ (انتگرال با حدود معکوس)
۱۷	۶.۵.۱	قضیه ۶.۵.۲ (انتگرال قدر مطلق)

۱۸	۶.۱	قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۱۸	۱.۶.۱	قضیه ۱.۶.۲ (قضیه اساسی — بخش اول)
۱۹	۲.۶.۱	نتیجه ۲.۶.۲
۱۹	۳.۶.۱	قضیه ۳.۶.۲ (قضیه اساسی — بخش دوم)
۲۰	۴.۶.۱	بحث تفصیلی
۲۰	۵.۶.۱	مثال ۴.۶.۲
۲۰	۶.۶.۱	مثال ۵.۶.۲
۲۱	۷.۱	قضایای تغییر متغیر
۲۱	۱.۷.۱	قضیه ۱.۷.۲ (تغییر متغیر — نسخه اول)
۲۱	۲.۷.۱	قضیه ۲.۷.۲ (تغییر متغیر — نسخه دوم)
۲۱	۳.۷.۱	نکته ۳.۷.۲
۲۲	۴.۷.۱	مثال ۴.۷.۲
۲۲	۵.۷.۱	مثال ۵.۷.۲
۲۲	۸.۱	انتگرال ریمان-اشتیلیس
۲۲	۱.۸.۱	تعریف ۱.۸.۲ (انتگرال ریمان-اشتیلیس)
۲۳	۲.۸.۱	ملاحظه ۲.۸.۲
۲۳	۳.۸.۱	قضیه ۳.۸.۲ (شرط ریمان برای ریمان-اشتیلیس)
۲۳	۴.۸.۱	قضیه ۴.۸.۲ (خطی بودن نسبت به α)
۲۳	۵.۸.۱	قضیه ۵.۸.۲ (خطی بودن نسبت به f)
۲۳	۶.۸.۱	قضیه ۶.۸.۲ (یکنوایی)
۲۳	۷.۸.۱	قضیه ۷.۸.۲ (جمعیت بودن)
۲۴	۸.۸.۱	قضیه ۸.۸.۲ (جزء به جزء)
۲۴	۹.۸.۱	قضیه ۹.۸.۲ (تبدیل ریمان-اشتیلیس به ریمان)
۲۵	۱۰.۸.۱	مثال ۱۰.۸.۲
۲۵	۱۱.۸.۱	مثال ۱۱.۸.۲
۲۵	۹.۱	قضیه مقدار میانی و میانگین انتگرال ها
۲۵	۱.۹.۱	قضیه ۱.۹.۲ (قضیه مقدار میانی برای انتگرال)
۲۶	۲.۹.۱	قضیه ۲.۹.۲ (قضیه میانگین وزن دار)
۲۷	۱۰.۱	انتگرال های ناسره
۲۷	۱.۱۰.۱	تعریف ۱.۱۰.۲ (انتگرال ناسره نوع اول)
۲۷	۲.۱۰.۱	تعریف ۲.۱۰.۲ (انتگرال ناسره نوع دوم)
۲۷	۳.۱۰.۱	قضیه ۳.۱۰.۲ (آزمون مقایسه)
۲۷	۴.۱۰.۱	قضیه ۴.۱۰.۲ (p -انتگرال)
۲۸	۵.۱۰.۱	قضیه ۵.۱۰.۲ (p -انتگرال نوع دوم)
۲۸	۶.۱۰.۱	مثال ۶.۱۰.۲
۲۸	۷.۱۰.۱	مثال ۷.۱۰.۲
۲۹	۸.۱۰.۱	مثال ۸.۱۰.۲

۱۱.۱ خلاصه فصل	۲۹
--------------------------	----

فصل ۱

انتگرال ریمان و ریمان-اشتیلیس

۱.۱ درآمد تاریخی و انگیزه

مفهوم انتگرال، مانند مشتق، یکی از دو ستون بنیادی آنالیز ریاضی است. ریشه‌های این مفهوم به مسائل هندسی و فیزیکی زیر بازمی‌گردد:

- **مسئله مساحت:** چگونه می‌توان مساحت ناحیه‌ای محصور بین یک منحنی و محور افقی را محاسبه کرد؟
 - **مسئله مسافت:** چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط یک جسم متحرک را از روی سرعت آن محاسبه کرد؟
- ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق.م) با روش «افنا» (Method of Exhaustion) مساحت‌های محدودی مانند مساحت زیر سهمی را محاسبه کرد. او ناحیه را با چندضلعی‌های محاطی و محیطی تقریب می‌زد و با افزایش تعداد اضلاع، به مساحت دقیق می‌رسید. این ایده، هسته اصلی تعریف انتگرال ریمان است.
- در قرن هفدهم، نیوتن و لایبنیتس با کشف رابطه بین مشتق و انتگرال (قضیه اساسی حساب)، حساب انتگرال را به ابزاری قدرتمند تبدیل کردند. اما تعریف دقیق انتگرال بر پایه مفهوم حد، توسط برنارد ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) در قرن نوزدهم صورت‌بندی شد. این تعریف، که امروزه **انتگرال ریمان** نامیده می‌شود، بر پایه افراز بازه و مجموع‌های بالا و پایین بنا شده است. بعدها توماس یوآخیم اشتیلیس (۱۸۵۶-۱۸۹۴) تعریف ریمان را تعمیم داد و **انتگرال ریمان-اشتیلیس** را معرفی کرد که در آن به جای طول زیربازه‌ها (Δx_i) ، از تغییرات یک تابع صعودی α ($\Delta \alpha_i$) استفاده می‌شود. این تعمیم، انتگرال ریمان را به عنوان حالت خاص $\alpha(x) = x$ در بر می‌گیرد و در نظریه احتمال، معادلات دیفرانسیل، و آنالیز تابعی کاربردهای فراوانی دارد.

نکته طنز

انتگرال ریمان مثل جمع زدن مساحت زیر نمودار با مستطیل‌های باریک است. ریمان-اشتیلیس مثل مساحت وزن‌دار است: هر قطعه وزن متفاوتی دارد.

۲.۱ افراز و مجموع‌های بالا و پایین

۱.۲.۱ تعریف ۱.۲.۲ (افراز)

فرض کنید $[a, b]$ یک بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشد. افراز P از $[a, b]$ مجموعه‌ای متناهی است:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

به طوری که:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

نقاط افراز را $x_0, x_1, \dots, x_n$ می‌نامیم. زیربازه‌های افراز عبارتند از:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

طول زیربازه i ام را با Δx_i نشان می‌دهیم:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

نرم (یا قطر) افراز P را با $\|P\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

۲.۲.۱ تعریف ۲.۲.۲ (افراز ریزتر)

فرض کنید P و Q دو افراز از $[a, b]$ باشند. می‌گوییم Q ریزتر از P است (یا Q پالایش P است) اگر $P \subseteq Q$ ؛ یعنی هر نقطه افراز P ، نقطه افراز Q نیز باشد. در این حالت می‌نویسیم $P \leq Q$.
ملاحظه: اگر Q ریزتر از P باشد، آنگاه $\|Q\| \leq \|P\|$ (چون زیربازه‌های Q تکه‌تکه‌تر هستند).

۳.۲.۱ تعریف ۳.۲.۲ (مجموع بالا و پایین ریمان)

فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد و $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ افرازی از $[a, b]$. برای هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، مقادیر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

از کراندار بودن f نتیجه می‌شود که M_i و m_i اعداد حقیقی متناهی هستند.

مجموع بالای ریمان f نسبت به P :

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

مجموع پایین ریمان f نسبت به P :

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

۴.۲.۱ بحث تفصیلی روی تعریف

۱. چرا f باید کراندار باشد؟

اگر f کراندار نباشد، ممکن است $M_i = +\infty$ یا $m_i = -\infty$ برای بعضی زیربازه‌ها، و مجموع‌های بالا و پایین بی‌معنا شوند. به همین دلیل، در تعریف انتگرال ریمان، کرانداری f شرط لازم است.

۲. رابطه بین $L(P, f)$ و $U(P, f)$.

برای هر افراز P ، چون $m_i \leq M_i$ برای همه i و $\Delta x_i > 0$:

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(P, f).$$

۳. تفسیر هندسی.

$U(P, f)$ مجموع مساحت مستطیل‌هایی است که از بالای منحنی $y = f(x)$ شروع می‌شوند (ارتفاع M_i). $L(P, f)$ مجموع مساحت مستطیل‌هایی است که از زیر منحنی شروع می‌شوند (ارتفاع m_i). اگر $f \geq 0$ ، آنگاه:

$$L(P, f) \leq \text{مساحت زیر منحنی} \leq U(P, f).$$

۵.۲.۱ لم ۴.۲.۲ (یکنوایی نسبت به پالایش)

بیان: اگر P و Q دو افراز از $[a, b]$ با $P \preceq Q$ باشند، آنگاه:

$$L(P, f) \leq L(Q, f) \leq U(Q, f) \leq U(P, f).$$

اثبات:

کافی است حالتی را اثبات کنیم که Q از افزودن یک نقطه به P حاصل شده باشد (حالت کلی با تکرار این استدلال به دست می‌آید).

فرض کنید $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ و $Q = P \cup \{x^*\}$ که $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$ برای بعضی k . آنگاه Q از P با شکستن زیربازه $[x_{k-1}, x_k]$ به دو زیربازه $[x_{k-1}, x^*]$ و $[x^*, x_k]$ حاصل می‌شود.

$$\text{اثبات } L(P, f) \leq L(Q, f)$$

قرار دهید:

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad m'_k = \inf_{[x_{k-1}, x^*]} f, \quad m''_k = \inf_{[x^*, x_k]} f.$$

چون $[x_{k-1}, x^*] \subseteq [x_{k-1}, x_k]$ ، داریم $m'_k \geq m_k$. مشابه $m''_k \geq m_k$.

سهم زیربازه $[x_{k-1}, x_k]$ در $L(P, f)$ برابر $m_k(x_k - x_{k-1})$ است. سهم دو زیربازه در $L(Q, f)$ برابر:

$$m'_k(x^* - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x^*) \geq m_k(x^* - x_{k-1}) + m_k(x_k - x^*) = m_k(x_k - x_{k-1}).$$

سایر زیربازه‌ها یکسان‌اند. پس $L(Q, f) \geq L(P, f)$.

اثبات $U(Q, f) \leq U(P, f)$:

مشابه با استفاده از $M' \leq M_k$ و $M'' \leq M_k$:

$$M'(x^* - x_{k-1}) + M''(x_k - x^*) \leq M_k(x_k - x_{k-1}).$$

پس $U(Q, f) \leq U(P, f)$

اثبات $L(Q, f) \leq U(Q, f)$: در تعریف ۳.۲.۲ دیدیم. ■

۶.۲.۱ لم ۵.۲.۲ (رابطه بین دو افراز دلخواه)

بیان: برای هر دو افراز P_1 و P_2 از $[a, b]$:

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f).$$

اثبات:

قرار دهید $P = P_1 \cup P_2$ (افراز مشترک). طبق لم ۴.۲.۲:

$$L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f).$$

■

۷.۲.۱ نتیجه ۶.۲.۲

بیان: مجموعه $\{L(P, f) : P \text{ افراز}\}$ از بالا کراندار است و:

$$\sup_P L(P, f) \leq \inf_P U(P, f).$$

اثبات:

طبق لم ۵.۲.۲، برای هر P_1, P_2 :

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f).$$

با گرفتن $\sup$ روی P_1 :

$$\sup_{P_1} L(P_1, f) \leq U(P_2, f) \quad \text{برای هر } P_2.$$

با گرفتن $\inf$ روی P_2 :

$$\sup_{P_1} L(P_1, f) \leq \inf_{P_2} U(P_2, f).$$

■

۳.۱ تعریف انتگرال ریمان

۱.۳.۱ تعریف ۱.۳.۲ (انتگرال ریمان)

فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. می‌گوییم f ریمان-انتگرال‌پذیر روی $[a, b]$ است اگر:

$$\sup_P L(P, f) = \inf_P U(P, f).$$

در این صورت، این مقدار مشترک را انتگرال ریمان f روی $[a, b]$ می‌نامیم و با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$$\int_a^b f, \quad \int_a^b f(x) dx, \quad \mathcal{R} \int_a^b f.$$

مجموعه توابع ریمان-انتگرال‌پذیر روی $[a, b]$ را با $\mathcal{R}[a, b]$ نشان می‌دهیم.

۲.۳.۱ بحث تفصیلی روی تعریف

۱. چرا $\sup L = \inf U$ ؟

این تعریف بر پایه ایده «محاط کردن» مساحت است. اگر بتوانیم مجموع‌های بالا و پایین را به یک مقدار مشترک نزدیک کنیم، آن مقدار را انتگرال می‌نامیم. طبق نتیجه ۶.۲.۲، همیشه $\sup L \leq \inf U$. اگر تساوی برقرار باشد، انتگرال موجود است.

۲. تفاوت با انتگرال نامعین.

انتگرال معین $\int_a^b f$ یک عدد است. انتگرال نامعین $\int f(x) dx$ یک خانواده توابع (پادمشتق‌ها) است. این دو مفهوم از طریق قضیه اساسی حساب به هم مرتبط می‌شوند.

۳. نماد $\int$.

نماد $\int$ (که شبیه حرف S است) توسط لایبنیتس معرفی شد و مخفف «Summa» (مجموع) است. این نماد یادآور مجموع‌های ریمان است.

۴.۱ شرط ریمان برای انتگرال‌پذیری

۱.۴.۱ قضیه ۱.۴.۲ (شرط ریمان)

بیان: فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار باشد. آنگاه f ریمان-انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، افزای P از $[a, b]$ وجود داشته باشد که:

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

اثبات:

($\Rightarrow$) فرض کنید f انتگرال‌پذیر باشد و $\int_a^b f = I$. طبق تعریف:

$$\sup_P L(P, f) = \inf_P U(P, f) = I.$$

برای $\varepsilon > 0$ ، طبق تعریف $\sup$ ، افزای P_1 وجود دارد که:

$$L(P_1, f) > I - \frac{\varepsilon}{4}.$$

طبق تعریف $\inf$ ، افزایی P_2 وجود دارد که:

$$U(P_2, f) < I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

قرار دهید $P = P_1 \cup P_2$. طبق لم ۴.۲.۲:

$$L(P, f) \geq L(P_1, f) > I - \frac{\varepsilon}{4}, \quad U(P, f) \leq U(P_2, f) < I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

پس:

$$U(P, f) - L(P, f) < \left(I + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon.$$

($\Leftrightarrow$) فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$ ، افزایی P با $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ وجود دارد. طبق نتیجه ۶.۲.۲:

$$0 \leq \inf_P U(P, f) - \sup_P L(P, f) \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، $\inf U = \sup L$ ، یعنی f انتگرال پذیر است. ■

۲.۴.۱ قضیه ۲.۴.۲ (معیار دنباله‌ای)

بیان: f ریمان-انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر دنباله‌ای از افرازها مانند $\{P_n\}$ با $\|P_n\| \rightarrow 0$ وجود داشته باشد که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(P_n, f) - L(P_n, f)] = 0.$$

اثبات:

($\Rightarrow$) فرض کنید f انتگرال پذیر است. برای هر n ، افزایی P_n با $U(P_n, f) - L(P_n, f) < 1/n$ انتخاب کنید. می‌توان فرض کرد $\|P_n\| \rightarrow 0$ (با ریزتر کردن افرازها). طبق قضیه ۱.۴.۲، این ممکن است.

($\Leftarrow$) اگر چنین دنباله‌ای وجود داشته باشد، برای هر $\varepsilon > 0$ ، به قدر کافی بزرگ انتخاب کنید که $U(P_n, f) - L(P_n, f) < \varepsilon$ طبق قضیه ۱.۴.۲، f انتگرال پذیر است. ■

۳.۴.۱ قضیه ۳.۴.۲ (انتگرال پذیری توابع پیوسته)

بیان: اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه f ریمان-انتگرال پذیر است.

اثبات:

گام ۱: یکنواخت پیوستگی.

چون f روی $[a, b]$ پیوسته است و $[a, b]$ فشرده است، طبق قضیه هاینه-کانتور، f روی $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است. یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر $x, y \in [a, b]$ با $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

گام ۲: انتخاب افراز.

افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ را با $\|P\| < \delta$ انتخاب کنید.

گام ۳: کران‌گذاری $M_i - m_i$.

روی هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، چون f پیوسته است، M_i و m_i به ترتیب ماکسیمم و مینیمم f روی این زیربازه هستند (طبق قضیه مقادیر کراندار). پس نقاط $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ وجود دارند که $f(u_i) = M_i$ و $f(v_i) = m_i$. چون $\|P\| < \delta$ ، طبق یکنواخت پیوستگی:

$$M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

گام ۴: محاسبه $U(P, f) - L(P, f)$.

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

طبق قضیه ۱.۴.۲، f انتگرال‌پذیر است. ■

۴.۴.۱ قضیه ۴.۴.۲ (انتگرال‌پذیری توابع یکنوا)

بیان: اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یکنوا باشد، آنگاه f ریمان-انتگرال‌پذیر است.

اثبات:

فرض کنید f صعودی باشد (حالت نزولی مشابه است). برای افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ ، چون f صعودی است:

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i).$$

پس:

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i \leq \|P\| \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

اما $\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(b) - f(a)$ (مجموع تلسکوپی). پس:

$$U(P, f) - L(P, f) \leq \|P\| [f(b) - f(a)].$$

اگر $f(b) = f(a)$ ، آنگاه f ثابت است و $U - L = 0$ برای هر افراز. در غیر این صورت، برای $\varepsilon > 0$ ، افرازی P با

$\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ انتخاب کنید. آنگاه $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. طبق قضیه ۱.۴.۲، f انتگرال‌پذیر است. ■

۵.۴.۱ قضیه ۵.۴.۲ (انتگرال‌پذیری توابع با تعداد متناهی ناپیوستگی)

بیان: اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار و دارای تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی باشد، آنگاه f ریمان-انتگرال‌پذیر است.

اثبات:

فرض کنید نقاط ناپیوستگی $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ باشند. برای $\varepsilon > 0$ ، اطراف هر c_j بازه‌ای به طول $\frac{\varepsilon}{4kM}$ (که $M = \sup |f|$) انتخاب کنید. مجموعه این بازه‌ها را $\bigcup_{j=1}^k (c_j - \delta_j, c_j + \delta_j)$ بنامید. خارج از این بازه‌ها، f پیوسته است (چون نقاط ناپیوستگی فقط c_j ها هستند). با اعمال قضیه ۳.۴.۲ روی هر زیربازه بسته که نقاط ناپیوستگی را در بر نمی‌گیرد، و مدیریت سهم بازه‌های اطراف c_j ، می‌توان $U - L < \varepsilon$ را نتیجه گرفت. ■

۶.۴.۱ مثال ۶.۴.۲ (تابع دیریکله)

تابع دیریکله:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

روی $[0, 1]$ ریمان-انتگرال پذیر نیست.

اثبات:

برای هر افراز P از $[0, 1]$ ، هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ شامل اعداد گنگ و گنگ است. پس:

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} D = 1, \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} D = 0.$$

پس:

$$U(P, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = 1, \quad L(P, D) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

برای هر افراز، $U - L = 1$. پس شرط ریمان برقرار نمی‌شود. ■

۷.۴.۱ مثال ۷.۴.۲ (تابع تومه)

تابع تومه (Riemann function):

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ با } \gcd(p, q) = 1, q > 0 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

روی $[0, 1]$ ریمان-انتگرال پذیر است و $\int_0^1 R = 0$.

اثبات (طرح کلی):

برای $\varepsilon > 0$ ، تعداد متناهی اعداد گنگ $x = p/q$ با $1/q \geq \varepsilon$ در $[0, 1]$ وجود دارد. این نقاط را با بازه‌های کوچک می‌پوشانیم. خارج از این بازه‌ها، $R(x) < \varepsilon$. با مدیریت مناسب افراز، $U(P, R) - L(P, R) < 2\varepsilon$ به دست می‌آید. ■

۵.۱ خواص انتگرال ریمان

۱.۵.۱ قضیه ۱.۵.۲ (خطی بودن انتگرال)

بیان: اگر $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ و $c \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ و $cf \in \mathcal{R}[a, b]$ ، و:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

اثبات:

گام ۱: انتگرال پذیری $f + g$.برای هر افراز P :

$$U(P, f + g) \leq U(P, f) + U(P, g), \quad L(P, f + g) \geq L(P, f) + L(P, g).$$

$$(\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g \text{ و } \sup_{[x_{i-1}, x_i]}(f + g) \leq \sup f + \sup g)$$

پس:

$$U(P, f + g) - L(P, f + g) \leq [U(P, f) - L(P, f)] + [U(P, g) - L(P, g)].$$

چون f, g انتگرال پذیرند، برای $\varepsilon > 0$ افرازهای P_1, P_2 وجود دارند که:

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(P_2, g) - L(P_2, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

قرار دهید $P = P_1 \cup P_2$. طبق لم ۴.۲.۲:

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$U(P, g) - L(P, g) \leq U(P_2, g) - L(P_2, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

پس:

$$U(P, f + g) - L(P, f + g) < \varepsilon.$$

طبق قضیه ۱.۴.۲، $f + g$ انتگرال پذیر است.گام ۲: محاسبه $\int (f + g)$.برای هر افراز P :

$$L(P, f) + L(P, g) \leq L(P, f + g) \leq \sup_P L(P, f + g) = \int (f + g).$$

با $\sup$ گرفتن روی P :

$$\int f + \int g \leq \int (f + g).$$

مشابه با U :

$$\int (f + g) \leq \int f + \int g.$$

پس تساوی برقرار است.

گام ۳: انتگرال پذیری cf .

اگر $c \geq 0$: $U(P, cf) = cU(P, f)$ و $L(P, cf) = cL(P, f)$.

اگر $c < 0$: $U(P, cf) = cL(P, f)$ و $L(P, cf) = cU(P, f)$.

در هر دو حالت، $U(P, cf) - L(P, cf) = |c|[U(P, f) - L(P, f)]$ ، که با انتخاب P مناسب کمتر از ε می شود. مقدار انتگرال نیز خطی است. ■

۲.۵.۱ قضیه ۲.۵.۲ (یکنوایی انتگرال)

بیان: اگر $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ و $f(x) \leq g(x)$ برای همه $x \in [a, b]$ ، آنگاه:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

اثبات:

برای هر افزایش P ، چون $f \leq g$ داریم $M_i(f) \leq M_i(g)$ و $m_i(f) \leq m_i(g)$. پس:

$$U(P, f) \leq U(P, g).$$

با گرفتن $\inf$ روی P :

$$\int f = \inf_P U(P, f) \leq \inf_P U(P, g) = \int g.$$

■

۳.۵.۱ نتیجه ۳.۵.۲

اگر $f \in \mathcal{R}[a, b]$ و $m \leq f(x) \leq M$ برای همه x ، آنگاه:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

اثبات: با اعمال قضیه ۲.۵.۲ روی توابع ثابت m و M . ■

۴.۵.۱ قضیه ۴.۵.۲ (جمعی بودن انتگرال)

بیان: اگر $f \in \mathcal{R}[a, b]$ و $f \in \mathcal{R}[b, c]$ ، آنگاه $f \in \mathcal{R}[a, c]$:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

اثبات:

گام ۱: انتگرال پذیری روی $[a, c]$.

برای $\varepsilon > 0$ ، افرازهای P_1 از $[a, b]$ و P_2 از $[b, c]$ با $U(P_1, f) - L(P_1, f) < \varepsilon/2$ و $U(P_2, f) - L(P_2, f) < \varepsilon/2$ انتخاب کنید. قرار دهید $P = P_1 \cup P_2$. این افرازی از $[a, c]$ است و:

$$U(P, f) - L(P, f) = [U(P_1, f) - L(P_1, f)] + [U(P_2, f) - L(P_2, f)] < \varepsilon.$$

پس f روی $[a, c]$ انتگرال پذیر است.

گام ۲: محاسبه انتگرال.

برای هر افراز P از $[a, c]$ که b را شامل می شود، $P = P_1 \cup P_2$ که P_1 افراز $[a, b]$ و P_2 افراز $[b, c]$ است. داریم:

$$L(P, f) = L(P_1, f) + L(P_2, f).$$

با $\sup$ گرفتن روی P :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

■

۵.۵.۱ تعریف ۵.۵.۲ (انتگرال با حدود معکوس)

قرارداد می کنیم:

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

و برای $a = b$:

$$\int_a^a f = 0.$$

با این قرارداد، رابطه جمعی بودن برای هر ترتیب a, b, c برقرار است.

۶.۵.۱ قضیه ۶.۵.۲ (انتگرال قدر مطلق)

بیان: اگر $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ، آنگاه $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ و:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

اثبات:

گام ۱: انتگرال پذیری $|f|$.

برای هر زیربازه، داریم:

$$|M_i(f) - m_i(f)| \geq |M_i(|f|) - m_i(|f|)|.$$

(این از نامساوی $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ نتیجه می‌شود.) پس:

$$U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f).$$

با انتخاب P مناسب، $U(P, |f|) - L(P, |f|) < \varepsilon$. پس $|f|$ انتگرال پذیر است.

گام ۲: نامساوی.

از $|f| \leq f \leq -|f|$ و یکنوایی (قضیه ۲.۵.۲):

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \implies \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

■

۶.۱ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱.۶.۱ قضیه ۱.۶.۲ (قضیه اساسی — بخش اول)

بیان: فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ریمان-انتگرال پذیر باشد. تابع $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

اگر f در نقطه $x_0 \in (a, b)$ پیوسته باشد، آنگاه F در x_0 مشتق پذیر است و:

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

اثبات:

گام ۱: محاسبه $F(x_0 + h) - F(x_0)$.

طبق جمعیتی بودن انتگرال (قضیه ۴.۵.۲):

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f.$$

(این رابطه برای $h > 0$ و $h < 0$ با قرارداد ۵.۵.۲ برقرار است.)

گام ۲: تشکیل نسبت تفاضلی.

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

گام ۳: تفاضل با $f(x_0)$.

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt.$$

(چون $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = f(x_0)$)

گام ۴: کران‌گذاری.

چون f در x_0 پیوسته است، برای $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای $|t - x_0| < \delta$:

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

برای $|h| < \delta$ ، همه t در بازه بین x_0 و $x_0 + h$ در شرط بالا صدق می‌کنند. پس:

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon.$$

گام ۵: نتیجه.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \implies F'(x_0) = f(x_0).$$

■

۲.۶.۱ نتیجه ۲.۶.۲

اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ روی (a, b) مشتق‌پذیر است و $F' = f$. یعنی F یک پادمشتق برای f است.

۳.۶.۱ قضیه ۳.۶.۲ (قضیه اساسی — بخش دوم)

بیان: اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ریمان-انتگرال‌پذیر باشد و $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که روی (a, b) مشتق‌پذیر است و $F'(x) = f(x)$ برای همه $x \in (a, b)$ ، آنگاه:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

اثبات:

گام ۱: افزاز و MVT.

فرض کنید $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ افزازی از $[a, b]$. روی هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، تابع F پیوسته و روی (x_{i-1}, x_i) مشتق‌پذیر است. طبق قضیه مقدار میانگین (قضیه ۱.۱۲.۱)، نقطه‌ای $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ وجود دارد که:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

گام ۲: مجموع تلسکوپی.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

سمت راست، یک مجموع ریمان برای f است (با نقاط نمونه ξ_i).

گام ۳: حد گرفتن.

چون f انتگرال پذیر است، برای هر دنباله افراز با $\|P\| \rightarrow 0$ ، مجموع های ریمان به $\int_a^b f$ میل می کنند (این نتیجه از تعریف انتگرال و قضیه ۲.۴.۲ به دست می آید). پس:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

■

۴.۶.۱ بحث تفصیلی

۱. رابطه بین دو بخش.

بخش اول می گوید: مشتق انتگرال (نسبت به حد بالایی) برابر خود تابع است. بخش دوم می گوید: انتگرال مشتق (روی کل بازه) برابر تفاضل مقادیر تابع در نقاط انتهایی است. این دو، عمل مشتق و انتگرال را به عنوان عمل معکوس یکدیگر معرفی می کنند.

۲. شرط پیوستگی f در بخش اول.

در بخش اول، پیوستگی f در x_0 شرط لازم است. اگر f فقط انتگرال پذیر باشد ولی در x_0 ناپیوسته باشد، ممکن است $F'(x_0)$ وجود نداشته باشد. مثال: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ روی $[-1, 1]$ ، $F(x) = |x| - 1$ که در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

۳. شرط پیوستگی F در بخش دوم.

در بخش دوم، F باید پیوسته باشد. اگر F فقط روی (a, b) مشتق پذیر باشد ولی در نقاط انتهایی پیوسته نباشد، رابطه ممکن است برقرار نباشد.

۴. کاربرد در محاسبه انتگرال.

بخش دوم ابزار اصلی محاسبه انتگرال های معین است: کافی است پادمشتق F را پیدا کنیم و $F(b) - F(a)$ را حساب کنیم.

۵.۶.۱ مثال ۴.۶.۲

$\int_0^1 x^2 dx$ را با قضیه اساسی حساب حساب کنید.

حل:

پادمشتق $f(x) = x^2$ برابر $F(x) = \frac{x^3}{3}$ است. پس:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

۶.۶.۱ مثال ۵.۶.۲

$\int_0^\pi \sin x dx$ را حساب کنید.

حل:

پادمشتق $\sin x$ برابر $-\cos x$ است. پس:

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

۷.۱ قضایای تغییر متغیر

۱.۷.۱ قضیه ۱.۷.۲ (تغییر متغیر — نسخه اول)

بیان: فرض کنید $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، $\phi(a) = c$ ، $\phi(b) = d$ ، و ϕ روی (a, b) مشتق‌پذیر با ϕ' پیوسته باشد. اگر $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

اثبات:

گام ۱: پادمشتق.

طبق قضیه اساسی حساب (قضیه ۳.۶.۲)، چون f پیوسته است، پادمشتق F با $F' = f$ وجود دارد. تابع $H(t) = F(\phi(t))$ را تعریف می‌کنیم.

گام ۲: مشتق H .

طبق قاعده زنجیره‌ای (قضیه ۱.۷.۱):

$$H'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

گام ۳: اعمال قضیه اساسی حساب.

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_a^b H'(t) dt = H(b) - H(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = F(d) - F(c).$$

و:

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c).$$

پس دو طرف برابرند. ■

۲.۷.۱ قضیه ۲.۷.۲ (تغییر متغیر — نسخه دوم)

بیان: اگر ϕ اکیداً نزولی باشد (با $\phi(a) = d$ ، $\phi(b) = c$)، آنگاه:

$$\int_c^d f(x) dx = - \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

اثبات: مشابه، با توجه به $\phi(b) - \phi(a) = c - d = -(d - c)$ و علامت $\phi' < 0$. ■

۳.۷.۱ نکته ۳.۷.۲

در عمل، اغلب تغییر متغیر را به صورت $u = \phi(t)$ یا $x = \phi(t)$ می‌نویسیم و $dx = \phi'(t) dt$. حدود انتگرال نیز بر حسب متغیر جدید تغییر می‌کنند.

۴.۷.۱ مثال ۴.۷.۲

$\int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx$ را حساب کنید.

حل:

قرار دهید $u = 1 - x^2$ ، پس $du = -2x dx$ و $x dx = -\frac{du}{2}$. حدود: $x = 1 \Rightarrow u = 0, x = -1 \Rightarrow u = 0$. پس:

$$\int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^0 \sqrt{u} \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int_0^0 u^{1/2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

۵.۷.۱ مثال ۵.۷.۲

$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$ را حساب کنید.

حل:

قرار دهید $u = \sin x$ ، پس $du = \cos x dx$. حدود: $x = 0 \Rightarrow u = 0, x = \pi/2 \Rightarrow u = 1$. پس:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}.$$

۸.۱ انتگرال ریمان-اشتیلیس

۱.۸.۱ تعریف ۱.۸.۲ (انتگرال ریمان-اشتیلیس)

فرض کنید $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد و $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار. برای افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ ، قرار دهید:

$$\Delta \alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0.$$

مجموع بالای ریمان-اشتیلیس:

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i.$$

مجموع پایین ریمان-اشتیلیس:

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i.$$

اگر $\sup_P L(P, f, \alpha) = \inf_P U(P, f, \alpha)$ ، می‌گوییم f نسبت به α ریمان-اشتیلیس انتگرال‌پذیر است و این مقدار مشترک را با:

$$\int_a^b f d\alpha, \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

نشان می‌دهیم.

۲.۸.۱ ملاحظه ۲.۸.۲

اگر $\alpha(x) = x$ ، آنگاه $\Delta\alpha_i = \Delta x_i$ و انتگرال ریمان-اشتیلیس به انتگرال ریمان تبدیل می‌شود. پس انتگرال ریمان حالت خاصی از انتگرال ریمان-اشتیلیس است.

۳.۸.۱ قضیه ۳.۸.۲ (شرط ریمان برای ریمان-اشتیلیس)

بیان: f نسبت به α (صعودی) انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، افرازی P وجود داشته باشد که:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

اثبات: مشابه قضیه ۱.۴.۲ با $\Delta\alpha_i$ به جای Δx_i . ■

۴.۸.۱ قضیه ۴.۸.۲ (خطی بودن نسبت به α)

بیان: اگر f نسبت به α و β انتگرال‌پذیر باشد و $c_1, c_2 \geq 0$ ، آنگاه:

$$\int f d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int f d\alpha + c_2 \int f d\beta.$$

اثبات: $\Delta(c_1\alpha + c_2\beta)_i = c_1\Delta\alpha_i + c_2\Delta\beta_i$ ، پس مجموع‌های بالا و پایین خطی می‌شوند. ■

۵.۸.۱ قضیه ۵.۸.۲ (خطی بودن نسبت به f)

بیان: اگر f, g نسبت به α انتگرال‌پذیر باشند و $c \in \mathbb{R}$:

$$\int (f + g) d\alpha = \int f d\alpha + \int g d\alpha, \quad \int cf d\alpha = c \int f d\alpha.$$

اثبات: مشابه قضیه ۱.۵.۲. ■

۶.۸.۱ قضیه ۶.۸.۲ (یکنوایی)

بیان: اگر $f \leq g$ و هر دو نسبت به α انتگرال‌پذیر باشند:

$$\int f d\alpha \leq \int g d\alpha.$$

اثبات: مشابه قضیه ۲.۵.۲. ■

۷.۸.۱ قضیه ۷.۸.۲ (جمعی بودن)

بیان: اگر f نسبت به α روی $[a, b]$ و $[b, c]$ انتگرال‌پذیر باشد:

$$\int_a^c f d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_b^c f d\alpha.$$

اثبات: مشابه قضیه ۴.۵.۲. ■

۸.۸.۱ قضیه ۸.۸.۲ (جزء به جزء)

بیان: اگر f نسبت به α انتگرال پذیر و α نسبت به f انتگرال پذیر باشد (یعنی $\int f d\alpha$ و $\int \alpha df$ موجود باشند)، آنگاه:

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

اثبات:

گام ۱: اتحاد جمع بندی.

برای افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$:

$$f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \sum_{i=1}^n [f(x_i)\alpha(x_i) - f(x_{i-1})\alpha(x_{i-1})].$$

گام ۲: تجزیه.

هر جمله را می نویسیم:

$$f(x_i)\alpha(x_i) - f(x_{i-1})\alpha(x_{i-1}) = f(x_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + \alpha(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

گام ۳: جمع.

$$f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^n \alpha(x_{i-1})\Delta f_i.$$

گام ۴: حد گرفتن.

با ریزتر کردن افراز، جمله اول به $\int f d\alpha$ و جمله دوم به $\int \alpha df$ میل می کند. ■

۹.۸.۱ قضیه ۹.۸.۲ (تبدیل ریمان-اشتیلیس به ریمان)

بیان: فرض کنید α صعودی و مشتق پذیر روی (a, b) با α' ریمان-انتگرال پذیر باشد. اگر f نسبت به α انتگرال پذیر و $f\alpha'$ ریمان-انتگرال پذیر باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

اثبات:

گام ۱: MVT روی α .

برای افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ ، طبق قضیه مقدار میانگین روی هر زیربازه:

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)\Delta x_i$$

برای $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

گام ۲: مجموع بالا.

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n M_i \alpha'(\xi_i) \Delta x_i.$$

گام ۳: مقایسه با مجموع ریمان $f\alpha'$.

مجموع $\sum_{i=1}^n M_i \alpha'(\xi_i) \Delta x_i$ یک مجموع ریمان برای $f\alpha'$ است (با نقاط نمونه ξ_i). با ریزتر کردن افراز، این مجموع به $\int_a^b f\alpha' dx$ میل می‌کند. ■

۱۰.۸.۱ مثال ۱۰.۸.۲

$\int_{-1}^1 x d(x^2)$ را حساب کنید.

حل:

$\alpha(x) = x^2$ پس $\alpha'(x) = 2x$. طبق قضیه ۹.۸.۲:

$$\int_{-1}^1 x d(x^2) = \int_{-1}^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

۱۱.۸.۱ مثال ۱۱.۸.۲

$\int_{-1}^1 x^2 d(e^x)$ را حساب کنید.

حل:

پس: $\alpha(x) = e^x$, $\alpha'(x) = e^x$.

$$\int_{-1}^1 x^2 d(e^x) = \int_{-1}^1 x^2 e^x dx.$$

با جزء به جزء:

$$= [x^2 e^x]_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 x e^x dx = e - 2[xe^x - e^x]_{-1}^1 = e - 2(e - e + 1) = e - 2.$$

۹.۱ قضیه مقدار میانی و میانگین انتگرال‌ها

۱.۹.۱ قضیه ۱.۹.۲ (قضیه مقدار میانی برای انتگرال)

بیان: اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

اثبات:

گام ۱: کران‌گذاری.

چون f پیوسته روی $[a, b]$ است، به ماکسیمم M و مینیمم m خود می‌رسد. پس برای همه x :

$$m \leq f(x) \leq M.$$

گام ۲: یکنوایی انتگرال.

طبق نتیجه ۳.۵.۲:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

گام ۳: تقسیم بر $b-a$.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

گام ۴: اعمال IVT.

چون f پیوسته است و $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ عددی بین m و M است، طبق قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته، نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \implies \int_a^b f = f(c)(b-a).$$

■

۲.۹.۱ قضیه ۲.۹.۲ (قضیه میانگین وزن دار)

بیان: اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر با $g \geq 0$ باشد، آنگاه نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

اثبات:

گام ۱: کران گذاری.

چون f پیوسته است، $m \leq f \leq M$ چون $g \geq 0$:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

گام ۲: یکنوایی.

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

گام ۳: حالت $\int g = 0$.اگر $\int_a^b g = 0$ ، چون $g \geq 0$ ، نتیجه می شود $g = 0$ تقریباً همه جا و $\int fg = 0$. حکم بدیهی است (هر c).گام ۴: حالت $\int g > 0$.

$$m \leq \frac{\int fg}{\int g} \leq M.$$

طبق IVT، $c \in (a, b)$ با $f(c) = \frac{\int fg}{\int g}$. ■

۱۰.۱ انتگرال‌های ناسره

۱.۱۰.۱ تعریف ۱.۱۰.۲ (انتگرال ناسره نوع اول)

فرض کنید $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ روی هر بازه $[a, b]$ ریمان-انتگرال پذیر باشد. انتگرال ناسره f روی $[a, \infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

به شرطی که این حد موجود باشد. در این صورت می‌گوییم انتگرال همگرا است. در غیر این صورت، واگرا است.

۲.۱۰.۱ تعریف ۲.۱۰.۲ (انتگرال ناسره نوع دوم)

فرض کنید $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ روی هر بازه $[a + \epsilon, b]$ ریمان-انتگرال پذیر باشد و f در a بی‌نهایت شود. انتگرال ناسره f روی $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

۳.۱۰.۱ قضیه ۳.۱۰.۲ (آزمون مقایسه)

بیان: فرض کنید $0 \leq f(x) \leq g(x)$ برای $x \geq a$. آنگاه:

۱. اگر $\int_a^\infty g$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f$ همگرا است.

۲. اگر $\int_a^\infty f$ واگرا باشد، $\int_a^\infty g$ واگرا است.

اثبات:

تابع $F(b) = \int_a^b f$ صعودی است (چون $f \geq 0$). اگر $\int_a^\infty g$ همگرا باشد، $G(b) = \int_a^b g$ کراندار است. چون $f \leq g$ ، پس $F(b) \leq G(b) \leq \int_a^\infty g < \infty$. پس F صعودی و کراندار است، پس حد $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ موجود است.

(۲) عکس نقیض (۱). ■

۴.۱۰.۱ قضیه ۴.۱۰.۲ (p -انتگرال)

بیان:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

همگرا است اگر و تنها اگر $p > 1$.

اثبات:

اگر $p \neq 1$:

$$\int_1^b x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}.$$

• اگر $p > 1$: $1 - p < 0$ ، پس $b^{1-p} \rightarrow 0$ وقتی $b \rightarrow \infty$. حد $\frac{1}{p-1}$ موجود.

• اگر $p < 1$: $1 - p > 0$ ، پس $b^{1-p} \rightarrow \infty$ و اگر.

اگر $p = 1$:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b \rightarrow \infty.$$

■ و اگر.

۵.۱۰.۱ قضیه ۵.۱۰.۲ (p -انتگرال نوع دوم)

بیان:

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p}$$

همگرا است اگر و تنها اگر $p < 1$.

اثبات:

اگر $p \neq 1$:

$$\int_{\epsilon}^1 x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_{\epsilon}^1 = \frac{1 - \epsilon^{1-p}}{1-p}.$$

• اگر $p < 1$: $1 - p > 0$ ، پس $\epsilon^{1-p} \rightarrow 0$ وقتی $\epsilon \rightarrow 0^+$. حد $\frac{1}{1-p}$ موجود.

• اگر $p > 1$: $1 - p < 0$ ، پس $\epsilon^{1-p} \rightarrow \infty$ و اگر.

اگر $p = 1$: $\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\ln \epsilon \rightarrow \infty$ و اگر. ■

۶.۱۰.۱ مثال ۶.۱۰.۲

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

همگرا.

۷.۱۰.۱ مثال ۷.۱۰.۲

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2.$$

همگرا.

۸.۱۰.۱ مثال ۸.۱۰.۲

 $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

همگرا.

۱۱.۱ خلاصه فصل

در این فصل، مفاهیم و قضایای زیر را با اثبات کامل بررسی کردیم:

تعاریف:

- افراز، نرم افراز، افراز ریزتر.
- مجموع بالا و پایین ریمان.
- انتگرال ریمان.
- انتگرال ریمان-اشتیلیس.
- انتگرال ناسره (نوع اول و دوم).

قضایا:

- یکنوایی مجموع‌ها نسبت به پالایش (لم ۴.۲.۲).
- رابطه بین دو افراز دلخواه (لم ۵.۲.۲).
- $\sup L \leq \inf U$ (نتیجه ۶.۲.۲).
- شرط ریمان برای انتگرال‌پذیری (قضیه ۱.۴.۲).
- معیار دنباله‌ای (قضیه ۲.۴.۲).
- انتگرال‌پذیری توابع پیوسته (قضیه ۳.۴.۲).
- انتگرال‌پذیری توابع یکنوا (قضیه ۴.۴.۲).
- انتگرال‌پذیری توابع با تعداد متناهی ناپیوستگی (قضیه ۵.۴.۲).
- خطی بودن انتگرال (قضیه ۱.۵.۲).
- یکنوایی انتگرال (قضیه ۲.۵.۲).

- جمعی بودن انتگرال (قضیه ۴.۵.۲).
- انتگرال قدر مطلق (قضیه ۶.۵.۲).
- قضیه اساسی حساب — بخش اول (قضیه ۱.۶.۲).
- قضیه اساسی حساب — بخش دوم (قضیه ۳.۶.۲).
- تغییر متغیر (قضیه ۱.۷.۲).
- شرط ریمان برای ریمان-اشتیلیس (قضیه ۳.۸.۲).
- خطی بودن ریمان-اشتیلیس (قضایای ۴.۸.۲ و ۵.۸.۲).
- یکنوایی ریمان-اشتیلیس (قضیه ۶.۸.۲).
- جمعی بودن ریمان-اشتیلیس (قضیه ۷.۸.۲).
- جزء به جزء (قضیه ۸.۸.۲).
- تبدیل ریمان-اشتیلیس به ریمان (قضیه ۹.۸.۲).
- مقدار میانی انتگرال (قضیه ۱.۹.۲).
- میانگین وزن دار (قضیه ۲.۹.۲).
- آزمون مقایسه (قضیه ۳.۱۰.۲).
- p -انتگرال (قضایای ۴.۱۰.۲ و ۵.۱۰.۲).

مثال‌ها:

- تابع دیریکله (انتگرال ناپذیر).
- تابع تومه (انتگرال پذیر با انتگرال صفر).
- محاسبه انتگرال‌های معین با قضیه اساسی حساب.
- تغییر متغیر در انتگرال‌ها.
- ریمان-اشتیلیس نسبت به توابع مختلف.
- انتگرال‌های ناسره همگرا و واگرا.

اشتباهات رایج:

- تصور انتگرال پذیری توابع ناپیوسته.
- فراموش کردن شرط کرانداری.
- اشتباه بین Δx_i و $\Delta \alpha_i$.

- فراموش کردن تغییر حدود در تغییر متغیر.
- اشتباه در تشخیص همگرایی انتگرال‌های ناسره.